Blatt 12, Aufgabe 46 (1)

a) $\Delta E = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = 0$

$$E = U + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial U(x(t))}{\partial t} + \frac{m}{2} \cdot \frac{\partial \dot{x}^2(t)}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial U(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial t}$$

$$= -F \cdot \dot{x} + m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x}$$

$$= -m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

q.e.d.

b) $m\ddot{x} = -xD$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + x\omega^2 = 0$

$$x = C \cdot e^{\lambda t}, \quad \dot{x} = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow C \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + C e^{\lambda t} \omega^2 = 0 \Leftrightarrow C e^{\lambda t} (\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + \omega^2) = 0 \quad \vee \quad C = 0 \text{ (trivial)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i \cdot \omega$$

$\Rightarrow x_1(t) = C_1' \cdot e^{i\omega t}$

und $x_2(t) = C_2' \cdot e^{-i\omega t}$

$\Big\}$ Fundamentalsystem $\Rightarrow$ Linearkombination um alle Lsg. zu erhalten

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$

Benutze Eulersche Identität:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \cdot \sin(\omega t)$$

$\Rightarrow x(t) = C_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + C_2 \cdot [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)]$

$$D_1 = C_1 + C_2, \quad D_2 = i(C_1 - C_2)$$

(1) $\Rightarrow x(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t)$

c) $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$

Einsetzen in (1):

$x(0) = D_1 \cdot \cos(0) + D_2 \sin(0) = 0$

$\Rightarrow D_1 = 0$

Und Einsetzen in Ableitung von (1):

$\dot{x}(t) = -D_1 \sin(\omega t) \cdot \omega + D_2 \cos(\omega t) \cdot \omega$

$v_0 = D_2 \omega \Leftrightarrow D_2 = \frac{v_0}{\omega}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$

d) $\frac{\partial U}{\partial x} = -F = x \omega^2 m$ mit $U(0) = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{\partial U \cdot \partial x'}{\partial x'} = \int_0^x x' \omega^2 m \, dx'$

$$\Rightarrow U(x) - U(0) = \left[\frac{1}{2} x^2 \omega^2 m\right]_0^x$$

$$(2) \Rightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2} x^2 \omega^2 m$$

e) $E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 m + U(x)$, (2) einsetzen

$$= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \omega^2 m$$

(i) $$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{\partial p} \cdot \partial\left[\frac{1}{2m} \cdot p^2 + \frac{m}{2} x^2 \omega^2\right]$$

$$= \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m}$$

(ii) $$\dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{2x}{2} \omega^2 m = -x \omega^2 m = -x \cdot D$$

$$\text{wg. } \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0$$

Jetzt die Eulergleichungen:

(i) $\hat{x}(t+\tau) = \hat{x}(t) + \frac{\hat{p}(t)}{m} \cdot \tau$

(i) $\hat{p}(t+\tau) = \hat{p}(t) - \hat{x}(t) \cdot D \cdot \tau$

und die Energie lässt sich berechnen durch:

$E(t) = \frac{1}{2m} \cdot p^2 + \frac{1}{2} x^2 \omega^2 m$

τ i. Bereich $10^{-4} - 10^{-6}$ wählen!